Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Differentialgleichungen spielen in den Naturwissenschaften eine grundlegende Rolle bei der Beschreibung physikalischer Vorgänge. In der Elektrotechnik treten sie vor allem bei der Berechnung elektromagnetischer Felder auf. Die Eigenart von Differentialgleichungen ist es, dass die gesuchten Funktionen zum Beispiel sowohl in ihrer Grundform, als auch in ihren Ableitungen oder Integralen vorkommmt. Das Lösen solcher Differntialgleichungen ist auf algebraischem Weg oft sehr komplex oder überhaupt nicht möglich. Es gibt aber numerische Verfahren, mit deren Hilfe man zumindest nährungsweise trotzdem Lösungen finden kann. Diese Verfahren werden zum Beispiel von Feldberechnungsprogrammen angewendet. Ein interessantes Verfahren ist die Lösung von Differentialgleichungen über die Momentenmethode. Als Anwendungsbeispiel habe ich die Lösung der Differentialgleichung der Pendelbewegung eines Fadenpendels gewählt.

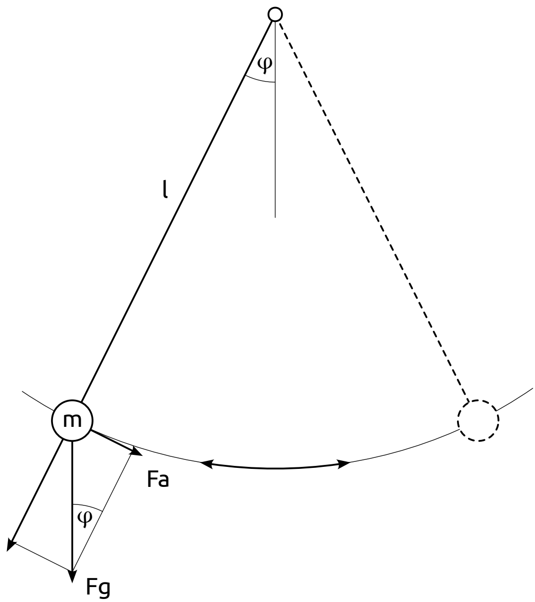

Abbildung 1.1: Das Fadenpendel

2 Die Momentenmethode

Die Momentenmethode ist ein Verfahren mit Hilfe dessen man Differntialgleichungen nährungsweise lösen kann. Die Idee ist, man formt das Problem so um, dass man dann die Lösung zumindest Nährungsweise über ein lineares Gleichungssystem bestimmen kann. Das Lösen einer Differentialgleichung ist im allgemeinen oft sehr kompliziert. Hingegen ist das Lösen eines linearen Gleichungssystems relativ einfach.

Das ist tatsächlich ein sehr häufig anzutreffender Trick der Elektrotechnik. Wenn man ein Problem nicht direkt lösen kann, dann formt man es zunächst in ein anderes bekanntes Problem um. Dann findet man eine Lösung und transformiert das Ergebnis wieder zurück. Ein Stichwort wäre hier auch die Laplace-Transformation und ihre inverse Variante.

Sehr hilfreich ist es, wenn man im Folgenden mit dem Begriff des linearen Operators vertraut ist. Denn mit Hilfe der Einführung des linearen Operators ist es tatsächlich möglich, das Problem des Lösens von Differentialgleichungen in das Problem des lösens linearer Gleichungssysteme umzuformen. Das Lösen linearer Gleichungssysteme ist relativ einfach und dafür gibt es auch Programme.

Die Kenntnis von der Differential- und Integralrechnung setze ich hier vorraus. Aber ich denke wer vor dem Problem vom Lösen von Differentialgleichungen steht kann damit umgehen. Sonst würde das Problem hier nicht auftauchen.

2.1 Lineare Operatoren

Zunächst werden wir uns kurz mit dem Begriff des linearen Operators beschäftigen. Da gibt es sicher ausführlichere Literatur. Für unsere Zwecke wird die folgende einfache Darstellung für das Verständnis der Momentenmethode ausreichen.

Allgemein kann man sagen, ein linearer Operator wirkt auf Funktionen. Er beschreibt, wie mit einer Funktion umgegangen wird. Das ist ähnlich wie Funktionen auf Zahlen wirken und beschreiben, wie mit Zahlen umgegangen wird. Betrachten wir beispielsweise folgende Funktion:

$$f(x) = x + 1 \tag{2.1}$$

So beschreibt die Funktion $f(x)$ wie mit der Zahl x umgegangen wird: Nimm die Zahl x und addiere 1 dazu.

Eine Ebene darüber sozusagen kann man mit Operatoren auch beschreiben, wie mit Funktionen umzugehen ist. Sie sind also so eine Art Handlungsanweisung, was mit einer Funktion zu machen ist. Einige vermutlich bekannte Operatoren sind zum Beispiel:

- bilde die Ableitung nach x: $\frac{d}{dx} \cdots$
- bilde das Integral über x: $\int \cdots \, dx$
- wende den Nabla-Operator an: $\nabla \cdots$

Das alles sind Beispiele von linearen Operatoren. Man kann das etwas verallgemeinern, da hier gemeinsame Gesetzmäßigkeiten gelten. Wenn man allgmein über einen linearen Operator sprechen möchte, kann man das durch das Symbol $\mathcal{L}\{\cdots\}$ abkürzen. Man meint dann gesprochen: Der Operator $\mathcal{L}\{\cdots\}$, der was auch immer macht, wirkt auf das was zwischen den geschweiften Klammern steht.

Unsere oben genannten Operatoren sind also alles lineare Operatoren:

$$\frac{d}{dx}\cdots, \int \cdots\ dx, \nabla \cdots, \cdots \to \mathcal{L}\{\cdots\} \tag{2.2}$$

Da wir hier mit linearen Operatoren arbeiten, müssen bestimmte Regeln der Lineariät gelten.

Beim Ableiten einer Funktion kennt man zum Beispiel die Summenregel. Das heißt, wenn man eine Summe von Funktionen ableiten möchte, kann man auch die einzelnen Summanden getrennt ableiten und die Ergebnisse dann wieder aufaddieren. Dadurch kann man ein Problem in kleinere Teilprobleme zerlegen, die dann einfacher zu lösen sind. Später addiert man die Teilergebnisse einfach wieder zusammen.

$$\mathcal{L}\{f_1(x) + f_2(x)\} = \mathcal{L}\{f_1(x)\} + \mathcal{L}\{f_2(x)\} \tag{2.3}$$

Für einen linearen Operator kann man das für zwei Summanden so ausdrücken: Der lineare Operator auf eine Summe von Funktionen angewendet führt zum selben Ergebnis, wie wenn man den linearen

Operator auf die einzelnen Summanden anwendet und die Teilergebnisse wieder aufaddiert. Der Operator wird dann auch *additiv* genannt.

Desweiteren kennt man vom Ableiten einer Funktion die Regel von konstanten Faktoren. Im Fall der Ableitung weiß man, dass man einen Faktor vor der abzuleitenden Funktion auch vor die Ableitung ziehen kann und dann nur die Funktion selbst ableiten muss. Allgemein für einen Linearen Operator ausgedrückt sieht das so aus.

$$\mathcal{L}\{\lambda f(x)\} = \lambda \mathcal{L}\{f(x)\} \tag{2.4}$$

Erfüllt der Operator diese Eigenschaft, wird er auch *homogen* genannt.

2.2 Herkömmliche Lösung einer Differentialgleichung

Das Verzwickte am Lösen von Differentialgleichungen ist, dass die gesuchte Funktion in der Differentialgleichung in verschiedenen Formen vor kommt, wie zum Beispiel der Funktion selbst und verschiedene Ableitungen oder Integrale der Funktion. Ein Beispiel ist die Differentialgleichung für die zeitliche Auslenkung $\varphi(t)$ eines Fadenpendels mit der Nährung für kleine Auslenkungen.

$$-\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) = \frac{g}{l}\varphi(t) \tag{2.5}$$

Die Variablen g und l sind hierbei die Erdbeschleunigung und die Länge des Fadens. Man sieht die Funktion der Auslenkung $\varphi(t)$ kommt in der Gleichung sowohl in der Grundform vor (rechte Seite), als auch in der zweiten Ableitung (linke Seite). Somit lässt sich die Gleichung nicht einfach nach $\varphi(t)$ umstellen.

Man kann sich aber vorstellen, dass es eine Funktion $\varphi(t)$ geben kann, welche für die Gleichung eine gültige Lösung liefert. Und das ist genau das Problem vom Lösen von Differentialgleichungen diese Funktion zu finden.

Wir werden diese Differentialgleichung erst einmal auf herkömmliche Weise lösen, da wir das Ergebnis später noch benötigen um es mit der Nährungslösung der Momentenmethode zu vergleichen.

Da man aus Erfahrung weiß, dass ein Pendel für kleine Auslenkungen eine sinusförmige Bewegung ausführt, lässt sich diese Differntialgleichung mit einem entsprechenden Ansatz recht einfach lösen. Eine Lösung für diese Differentialgleichung erhält man daher hier mit dem Ansatz einer sinusförimgen Schwingung.

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} sin(\omega t) \tag{2.6}$$

Man bildet dann die zweite Ableitung der Funktion und kann dann beide Gleichungen probehalber in die Differentialgleichung (2.5) einsetzen.

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) = -\hat{\varphi}\omega^2 sin(\omega t) \tag{2.7}$$

$$\hat{\varphi}\omega^2 sin(\omega t) = \frac{g}{l}\hat{\varphi} sin(\omega t) \tag{2.8}$$

Der Teil $\hat{\varphi} sin(\omega t)$ kürzt sich auch der Gleichung heraus und die Gleichung kann nach ω aufgelöst werden. Man sieht, dass der gewählte Ansatz für das so bestimmte ω eine Lösung für die Differentialgleichung ist. Es macht auch Sinn, dass die Kreisfrequenz ω mit welcher das Pendel schwingt, unabhängig von der Zeit t ist. Die Pendelfrequenz, ändert sich also nicht mit der Zeit.

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2.9}$$

In manchen Fällen kann man eine Differentialgleichung also so wie hier, durch geschicktes Raten lösen, indem man einen Ansatz macht und probiert, ob man damit eine gültige Lösung für die Differentialgleichung finden kann. Man probiert also aus, ob eine geratene Funktion eine Lösung für die Differentialgleichung ist. Das geht dann, wenn man schon eine Vorstellung davon hat was rauskommen sollte. Wie zum Beispiel hier eine Schwingungsgleichungen. Man kann sich vorstellen, dass man mit dieser Methode jedoch schnell an Grenzen kommt.

Bei der Momentenmethode zur Lösung von Differentialgleichungen geht man daher von einem allgemeineren Ansatz aus, indem man versucht die gesuchte Funktion durch eine Summe aus Basisfunktionen anzunähern. Man wird dann wahrscheinlich keine exakte Lösung für die Differntialgleichung finden, aber zumindest eine Nährung. Aber auch eine Nährungslösung kann eine gute Lösung sein und ist allemal besser als gar keine Lösung zu haben.

2.3 Der lineare Operator und Differentialgleichungen

Zunächst kann man mit Hilfe des linearen Operators eine Differentialgleichung in einer allgemeineren Form darstellen. Das ist sehr hilfreich, da man dann die Regeln für das Umformen von Gleichungen mit lineare Oparatoren anwenden kann.

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = g(x) \tag{2.10}$$

Hierbei ist $f(x)$ die gesuchte Funktion und $g(x)$ eine bekannte Funktion. Die Funktion $g(x)$ wird auch als Anregungsfunktion bezeichnet.

Der Lineare Operator $\mathcal{L}\{f(x)\}$ beschreibt also den Teil der Differentialgleichung, welcher alle Differentiale und Integrale der Funktion $f(x)$ enthält. Die Funktion $g(x)$ enthält den Rest der Gleichung. Die Aufgabe der Lösung dieser Differentialgleichung ist es wie wir gesehen haben, die Funktion $f(x)$ zu bestimmen, welche die Gleichung erfüllt.

Die Idee der Momentenmethode ist es wie schon erwähnt, die gesuchte Funktion $f(x)$ durch eine Summe aus $N+1$ linear unabhängigen und gewichteten Basisfunktionen $\Psi_n(x)$ auszudrücken.

Dabei spielt $\Psi_0(x)$ eine besondere Rolle. Mit der Basisfunktion $\Psi_0(x)$ werden die Randbedingungen erfüllt. Dadurch müssen die Randbedinungen bei den Basisfunktionen $\Psi_n(x)$ nicht mehr betrachtet werden. Man wählt diese Basisfunktionen $\Psi_n(x)$ dann so, dass sie an den Rändern der gesuchten Funktion den Wert 0 haben. Die Ränder werden ja wie gesagt durch die Funktion $\Psi_0(x)$ abgebildet.

$$f(x) \approx \Psi_0(x) + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \Psi_n(x) \tag{2.11}$$

Die Basisfunktionen $\Psi_n(x)$ werden von uns selbst möglichst geschickt gewählt und können daher als bekannt angenommen werden.

Linear unabhängig heißt hier vereinfacht gesagt, dass die Basisfunktionen sich alle unterscheiden müssen und sich nicht aus einer Kombination anderer Basisfunktionen darstellen lassen dürfen.

Mit dem Ansatz der Nährung für $f(x)$ aus der Gleichung (2.11) gehen wir jetzt in die Gleichung (2.10) . Wir ersetzen die Funktion $f(x)$ durch ihre Nährung und erhalten folgende Gleichung

$$\mathcal{L}\{\Psi_0(x) + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \Psi_n(x)\} = g(x) \tag{2.12}$$

Mit den Regeln welche aus der Linearität des linearen Operators folgen, formt man diese Gleichung etwas um. Wir wenden die Summenregel an und ziehen den linearen Operator dann noch in das Summenzeichen rein. Den Faktor α_n können wir noch vor den linearen Operator schreiben.

$$\mathcal{L}\{\Psi_0(x)\} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathcal{L}\{\Psi_n(x)\} = g(x) \tag{2.13}$$

Etwas umgestellt sieht die Gleichung dann so aus. Wir fassen die Gleichung noch einmal etwas zusammen und schauen das Ergebnis dann an.

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \underbrace{\mathcal{L}\{\Psi_n(x)\}}_{g_n(x)} = \underbrace{g(x) - \mathcal{L}\{\Psi_0(x)\}}_{h(x)} \tag{2.14}$$

Wie man sieht, haben wir durch die Umformungen, die Differntialgleichung in eine rein algebraische Gleichung überführt.

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n g_n(x) = h(x) \tag{2.15}$$

$$h(x) = g(x) - \mathcal{L}\{\Psi_0(x)\} \tag{2.16}$$

$$g_n(x) = \mathcal{L}\{\Psi_n(x)\} \tag{2.17}$$

Die Funktion $g(x)$ ist bekannt da diese aus der Aufgabenstellung vorgegeben ist. Die Funktion $\Psi_0(x)$ ist ebenfalls bekannt, da wir die Basisfunktionen selbst gewählt haben. Somit kann auch $\mathcal{L}\{\Psi_0(x)\}$ berechnet werden und folglich kann $h(x)$ auch als bekannt angenommen werden.

Auch die Basisfunktionen $\Psi_n(x)$ wurden von uns gewählt und können daher berechnet werden (was ja der Trick der Momentenmethode ist). Damit können die Funktionen $\mathcal{L}\{\Psi_n(x)\}$ und damit auch $g_n(x)$ berechnet werden.

Betrachten wir jetzt nochmal die Gleichung (2.15). Wie wir festgestellt haben, sind die Funktionen $g_n(x)$ und $h(x)$ beide bekannt und können berechnet werden. Unbekannt sind lediglich die N Entwicklungskoeffizienten α_n. Wären die Entwicklungskoeffizienten bekannt, dann könnte man über die Gleichung (2.11) die gesuchte Lösung der Differentialgleichung als Nährung darstellen. Und die N Entwicklungskoeffizienten können auch bestimmt werden.

Die Frage ist also nun, wie bestimmt man diese Entwicklungskoeffizienten. Zur Bestimmung von N Unbekannten sind bekanntlicher Weise N Gleichungen für die Lösung notwendig. Ein Verfahren zur Lösung ist das Einsetzen von N Punkten in die Gleichung um die N Gleichungen zu erhalten. Man versucht also, an N Punkten x_j die Gleichung auszuwerten.

$$x_j \text{ mit } j = 1, 2, 3, \ldots N \tag{2.18}$$

Mathematisch kann man das dann so ausrücken. Man setzt die N Punkte x_j für alle j von 1 bis N in die Gleichung (2.15) ein.

$$\sum_{n=1}^{N} g_n(x_j)\alpha_n = h(x_j) \quad \forall \quad j = 1 \ldots N \tag{2.19}$$

Hierbei sind noch $g_n(x_j)$ und α_n vertauscht worden, was man in einem Produkt ja machen darf. Das kann man jetzt einfach mal stupide runterschreiben. Dann sieht man besser was wir durch die Umformungen erreicht haben.

$$
\begin{array}{ccccccc}
g_1(x_1)\alpha_1 & + & g_2(x_1)\alpha_2 & + & \cdots & g_N(x_1)\alpha_N = h(x_1) \\
g_1(x_2)\alpha_1 & + & g_2(x_2)\alpha_2 & + & \cdots & g_N(x_2)\alpha_N = h(x_2) \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\
g_1(x_N)\alpha_1 & + & g_2(x_N)\alpha_2 & + & \cdots & g_N(x_N)\alpha_N = h(x_N)
\end{array}
$$

Man sieht es entsteht ein lineares Gleichungssystem mit N Gleichungen für N Unbekannte α_n. Ein lineares Gleichungssystem kann man auch in Matrixform darstellen. Darüber können wir uns jetzt erstmal freuen, denn in der Form lässt es sich dann auch einfach durch bekannten Verfahren lösen.

$$
\begin{pmatrix}
g_1(x_1) & g_2(x_1) & \cdots & g_N(x_1) \\
g_1(x_2) & g_2(x_2) & \cdots & g_N(x_2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g_1(x_N) & g_2(x_N) & \cdots & g_N(x_N)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix}
$$

Programme wie *Octave* oder *Matlab* können das sehr gut. Das Programm *Octave* hat den Vorteil, dass es eine freie Software ist und somit frei und kostenlos verwendet werden darf. In dem folgenden Beispiel verwende ich auch *Octave* um die Differentialgleichung des Pendels zu lösen.

2.4 Beispiel für das Fadenpendel (Ansatz 1)

Um das Verfahren der Momentenmethode noch etwas klarer zu machen, werden wir jetzt die Momentenmethode auf das Beispiel des Fadenpendels anwenden. Die exakte Lösung haben wir bereits ermittelt. Damit können wir die Nährungslösung der Momentenmethode dann mit dieser exakten Lösung vergleichen.

Die Aufgabe lautet also: Finde die Funktion $\varphi(t)$ mit Hilfe der Momentenmethode, welche die Differentialgleichung (2.20) erfüllt.

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) + k \cdot \varphi(t) = 0 \quad \text{mit} \quad k = \frac{g}{l} \tag{2.20}$$

Der Pendel soll sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Mitte, also bei $\varphi(0) = 0$ befinden. Und zum Zeitpunkt $t = t_0$ soll der Pendel eine Auslenkung von $\varphi(t_0) = \varphi_0$ haben. Das sind dann unsere Randbedingungen.

$$\varphi(0) = 0 \tag{2.21}$$

$$\varphi(t_0) = \varphi_0 \tag{2.22}$$

Mit Hilfe des linearen Operators, lässt sich die Differentialgleichung neu schreiben.

$$\mathcal{L}\{\varphi(t)\} = \frac{d^2}{dt^2}\varphi(t) + k \cdot \varphi(t) = 0 \tag{2.23}$$

In der Form lässt sich die Anregungsfunktion ablesen. Die Anregungsfunktion ist der rechte Teil der Gleichung und ist in diesem Fall einfach Null.

$$g(x) = 0 \tag{2.24}$$

Im Weiteren werden wir uns um die Basisfunktionen $\Psi_0(t)$ und $\Psi_n(t)$ für die Nährung der Lösung kümmern. Zunächst legen wir die Basisfunktion $\Psi_0(t)$ zur Erfüllung der Randbedingungen fest. Hierfür wählen wir hier einfach eine Ursprungsgerade, welche durch den Punkt (t_0/φ_0) verläuft. Durch etwas überlegen kommt man auf die Gleichung für $\Psi_0(t)$.

$$\Psi_0(t) = \frac{\varphi_0}{t_0}t \tag{2.25}$$

Für die Basisfunktionen $\Psi_n(t)$ muss man etwas mehr nachdenken. Die Basisfunktionen sollen an den Rändern, also bei $t = 0$ und $t = t_0$ für alle n den Wert $\Psi_n(t) = 0$ aufweisen. Annähern möchte ich die Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe von Polynomen. Die Gleichung (2.26) erfüllt diese Bedingungen, was man leicht durch Einsetzen der Randbedingungen prüfen kann.

$$\Psi_n(t) = \frac{t}{t_0} - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{(n+1)} \tag{2.26}$$

Desweiteren brauchen wir dann noch die zweite Ableitung der Funktionen $\Psi_0(t)$ und $\Psi_n(t)$ um den linearen Operator, angewendet auf die Basisfunktionen $\Psi_0(t)$ und $\Psi_n(t)$, darstellen zu können. Denn in unserem speziellen Fall für das Pendel, tritt die Lösungsfunktion in der Differentialgleichung in der Grundform und in der zweiten Ableitung auf. Wir bestimmen hierfür zunächst die erste Ableitung von $\Psi_0(t)$ und $\Psi_n(t)$ und davon dann die zweiten Ableitungen.

$$\frac{d}{dt}\Psi_0(t) = \frac{\varphi_0}{t_0} \tag{2.27}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Psi_0(t) = 0 \tag{2.28}$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_n(t) = \frac{1}{t_0} - \frac{(n+1)}{t_0^{(n+1)}} \cdot t^n \tag{2.29}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Psi_n(t) = -\frac{n(n+1)}{t_0^{(n+1)}} t^{(n-1)} \tag{2.30}$$

Jetzt können wir den linearen Operator angewendet auf die Basisfunktion $\Psi_0(t)$ und $\Psi_n(t)$ aufschreiben.

$$\mathcal{L}\{\Psi_0(t)\} = k \cdot \frac{\varphi_0}{t_0} t \tag{2.31}$$

$$\mathcal{L}\{\Psi_n(t)\} = \frac{d^2}{dt^2}\Psi_n(t) + k \cdot \Psi_n(t) \tag{2.32}$$

Jetzt sind wir fast fertig. Es fehlen lediglich noch die zwei Hilfsfunktionen $h(t)$ und $g_n(t)$, mit denen dann das Gleichungssystem zur Bestimmung der Lösung aufgestellt werden kann. Mit den bereits ermittelten Teilergebnissen können die jetzt auch einfach aufgeschrieben werden.

$$h(t) = g(t) - \mathcal{L}\{\Psi_0(t)\} = -k \cdot \frac{\varphi_0}{t_0} t \tag{2.33}$$

$$g_n(t) = \mathcal{L}\{\Psi_n(t)\} = \frac{d^2}{dt^2}\Psi_n(t) + k \cdot \Psi_n(t) \tag{2.34}$$

Mit diesen Gleichungen lässt sich das Gleichungssystem zur Bestimmung der Gewichtungsfaktornen α_n aufstellen und damit dann die Nährungslösung berechnen.

$$\varphi(t) \approx \Psi_0(t) + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \Psi_n(t) \tag{2.35}$$

Mit dem Programm *Octave* habe ich das für dieses Beispiel mal gemacht. Das Ergebnis ist in Abbildung (2.1) und (2.2) für verschiedene Wertebereiche der Stützstellen zu sehen. Selbst mit nur 5 Stützstellen kommt man schon ziemlich nahe, innerhalb des Wertebereichs der Stützstellen, an die exakte Lösung ran.

$$t_0 = \frac{T}{4} \tag{2.36}$$

Die Zeit t_0 wurde in den Beispielen hier als ein Viertel der Periodendauer T der Pendelbewegung gewählt, um das Ergebnis einfacher mit der exakten Lösung der Differentialgleichung vergleichen zu können. Die Zeit t_0 kann sonst aber natürlich frei gewählt werden.

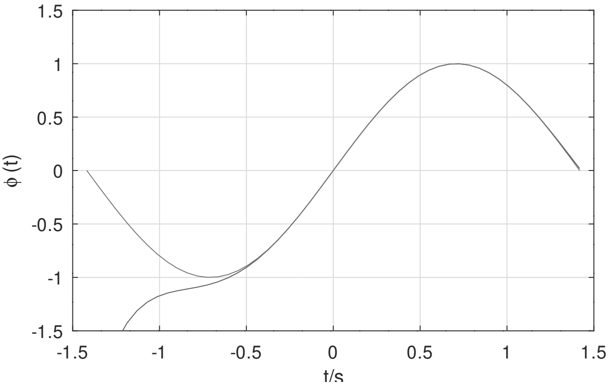

Abbildung 2.1: Ergebnis der Momentenmethode mit 5 Stützstellen im Vergleich zur exakten Lösung. Wertebereich der Stützstellen: $[0.1 \cdot t_0 \dots t_0]$

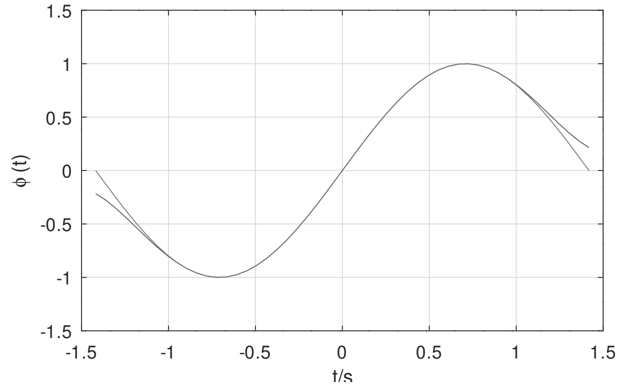

Abbildung 2.2: Ergebnis der Momentenmethode mit 5 Stützstellen im Vergleich zur exakten Lösung. Wertebereich der Stützstellen: $[-t_0 \dots t_0]$

2.5 Beispiel für das Fadenpendel (Ansatz 2)

Auch bei diesem Ansatz werden wir die Lösung der Differntialgleichung durch ein Polynom annähern. Man kann jedoch bei der Wahl der Basisfunktionen etwas geschickter als im ersten Ansatz vorgehen, wenn man weitere Informationen einfließen lässt. Es ist nachvollziehbar, dass je besser die Basisfunktionen zur gesuchten Lösung passen, desto besser wird auch die gesuchte Nährung mit der idealen Lösung übereinstimmen.

Wenn man die Eigenschaften von Polynomen besser versteht, dann kann man in unserem Fall bessere Basisfunktionen wählen. Daher werden wir uns hier vorab mit Polynomen und deren Eigenschaften beschäftigen.

Betrachtet man ein allgemeines Polynom, so sieht man, dass Polynome aus einer Summe von gewichteten Potenzen bestehen. Der Exponent erhöht sich hierbei mit jedem Summanden einfach um eins. Das hat schon eine gewisse Ähnlichkeit mit der Summe der Basisfunktionen der Momentenmethode.

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \cdot x^i \qquad (2.37)$$

Die Exponenten sind natürliche Zahlen und können somit gerade oder auch ungerade sein. So kann man die zwei Sondefälle von

Polynomen, mit lediglich geraden oder ungeraden Exponenten, unterscheiden. Man spricht dann entsprechend auch von geraden oder ungeraden Polynomen.

$$p_g(x) = \alpha_0 + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^4 + \cdots = \sum_{i=0}^{N} \alpha_{2i} \cdot x^{2i} \tag{2.38}$$

$$p_u(x) = \alpha_1 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^3 + \cdots = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{2i-1} \cdot x^{(2i-1)} \tag{2.39}$$

Die Unterscheidung in die zwei Arten von Polynomen macht Sinn, da sie jeweils besondere Eigenschaften bezüglich ihrer Symmetrie haben. Das kann man sich einmal veranschaulichen. In den folgenden Abbildungen (2.3) und (2.4) sind einige Beispiele zu sehen.

Man sieht, dass gerade Polynome zu Funktionen führen, welche alle symmetrisch zur y-Achse sind. Entsprechend dazu sind die Funktionen ungerader Polynome alle punktsymetrisch zum Koordinatenursprung. Man kann sich klar machhen, dass dieses Symmetrieverhalten für alle entsprechenden geraden und ungeraden Polynome gelten muss. Die Symmetrie bleibt auch bei der Addition solcher Polynome erhalten.

Mit dieser Erkenntnis betrachten wir nun die gesuchte Funktion der Pendelbewegung. Auch wenn wir normalerweise natürlich nicht wissen, dass die gesuchte Funktion eine Sinusfunktion ist, so wissen

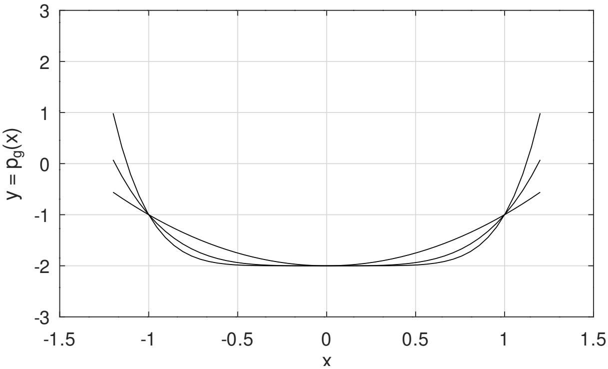

Abbildung 2.3: Beispiele verschiedener Funktionen von geraden Potenzen

wir aber dennoch, dass ein Pendel genauso weit nach links wie nach rechts ausschlägt. Die Auslenkung nach links ist symmetrisch zur Auslenkung nach rechts.

Daraus können wir folgern, dass die gesuchte Funktion der Pendelbewegung punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung sein muss. Eine solche Funktion wird sich also mit Polynomen mit ungeraden Exponenten gut annähern lassen. Polynome mit geraden Exponenten werden dafür nicht geeignet sein.

Wir wählen für den neuen Ansatz jetzt also Basisfunktionen, welche zu Polynomen mit ungeraden Exponenten führen und damit bessers zu unserem Problem passen.

$$\Psi_0(t) = \frac{\varphi_0}{t_0} t \tag{2.40}$$

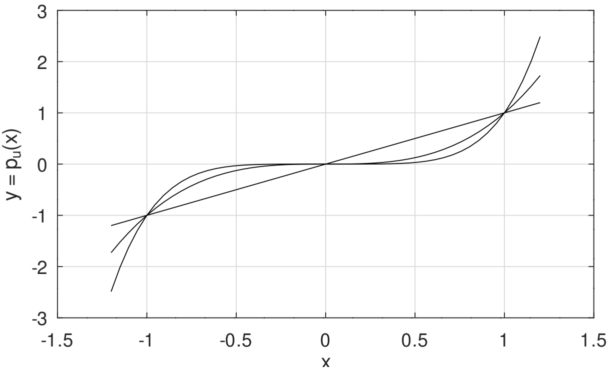

Abbildung 2.4: Beispiele verschiedener Funktionen von ungeraden Potenzen

$$\Psi_n(t) = \frac{t}{t_0} - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{(2n+1)} \tag{2.41}$$

Das Verfahren folgt sonst dem Ablauf im ersten Ansatz und ich werde es daher nicht mehr so aufführlich ausführen. Wie im vorherigen Beispiel bilden wir wieder die benötigten Ableitungen.

$$\frac{d^2}{dt^2}\Psi_0(t) = 0 \tag{2.42}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Psi_n(t) = -\frac{2n(2n+1)}{t_0^{(2n+1)}}t^{(2n-1)} \tag{2.43}$$

Jetzt können wir wieder den linearen Operator angewendet auf die Basisfunktion $\Psi_0(t)$ und $\Psi_n(t)$ aufschreiben.

$$\mathcal{L}\{\Psi_0(t)\} = k \cdot \Psi_0(t) \tag{2.44}$$

$$\mathcal{L}\{\Psi_n(t)\} = \frac{d^2}{dt^2}\Psi_n(t) + k \cdot \Psi_n(t) \tag{2.45}$$

Daraus folgen die zwei Hilfsfunktionen $h(t)$ und $g_n(t)$, mit denen dann das Gleichungssystem zur Bestimmung der Lösung aufgestellt werden kann. Die Anregungsfunktion $g(t) = 0$ ist natürlich noch dieselbe.

$$h(t) = g(t) - \mathcal{L}\{\Psi_0(t)\} = -k \cdot \Psi_0(t) \tag{2.46}$$

$$g_n(t) = \mathcal{L}\{\Psi_n(t)\} = \frac{d^2}{dt^2}\Psi_n(t) + k \cdot \Psi_n(t) \tag{2.47}$$

Den Rest lassen wir *Octave* machen. Wie erwartet, ist die Nährung für die Lösung der Differentialgleichung jetzt wesentlich besser. Selbst mit nur drei Stützstellen kommt das Ergebnis der idealen Lösung sogar noch näher, als das Ergebnis mit dem ersten Ansatz und fünf Stützstellen.

Die Skripte für *Octave* können von der Homepage heruntergeladen werden.

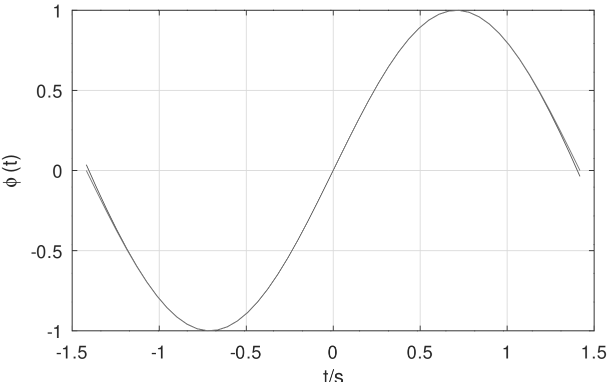

Abbildung 2.5: Ergebnis der Momentenmethode mit 3 Stützstellen im Vergleich zur exakten Lösung. Wertebereich der Stützstellen: $[0.1 \cdot t_0 \ldots t_0]$